SOLUCIONES POSITIVAS A UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES ELÍPTICAS

MIGUEL ANGEL CETINA HOYOS

Trabajo de grado para optar al t tulo de Licenciado en Matematicas

Director
JUAN CARLOS CARDENO
Profesor del Departamento de Matematicas y Estad stica

UNIVERSIDAD DEL TOLIMA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACION
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMATICAS
IBAGUE
2016

UNIVERSIDAD DEL TOLIMA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
40 Años
Trabajando por el Tolima

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMATICAS

ACTA DE LA SUSTENTACIÓN PÚBLICA DE TRABAJO DE GRADO No. __DE 201

SIENDO LAS 11:00 am DEL DIA 18 DE Mayo DEL AÑO 2017 SE REUNIERO EN La sala de Didácticas EL JURADO CALIFICADOR DEL TRABAJO DE GRAD TITULADO: Soluciones Positivas a un sistema de Ecuacion Diferenciales Parciales Elípticas.

Presentado por: **MIGUEL ÁNGEL CETINA** CÓDIGO: 0511 0035 2012

Dirigido por el Profesor **JUAN CARLOS CARDEÑO ARDILA**

CON EL FIN DE PRESENCIAR Y CALIFICAR LA SUSTENTACIÓN PÚBLICA DE MISMO. LA SUSTENTACIÓN SE HIZO EN PRESENCIA DEL SIGUIENT AUDITORIO:

*ver lista anexa

LAS CALIFICACIONES OTORGADAS POR LOS MIEMBROS DEL JURADO A SUSTENTACIÓN SON LAS SIGUIENTES:

JURADO 1: PABLO Emilio CALDERÓN CALIFICACIÓN 4.6

JURADO 2: Pedro José Gallego T CALIFICACION 4.7

CONCEPTO Meritorio PROMEDIO 4.7

SIENDO LAS 12:00 m SE CERRÓ EL ACTO DE SUSTENTACIÓN.

EN CONSTANCIA SE FIRMA

JURADO 1: ____ JURADO2: ____

DIRECTOR DE PROGRAMA (E) ____

Tabla de Contenido

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar agradecer a mi familia y con mayor importancia agradecer a mi se~nora madre, Maria de Jesus Hoyos quien dio fuerza y apoyo incondicional para culminacion de este proyecto, seguir estudiando y lograr el objetivo trazado en vista de un mejor futuro. Agradecer a mi asesor de tesis, Mg. Juan Carlos Carde~no encargado de gran parte de mi formacion academica, quien inculco en mi un sentido de responsabilidad y rigor, tambien agradecer Yiliana Ochoa quien ayudo y acompa~no durante todo proceso con correcciones y estuvo ahi dandome su apoyo manera incondicional y por ultimo agradecer a mis amigos y colegas de la Licenciatura en Matematicas que estuviron ah apoyandome.

INTRODUCCION

En este trabajo se estudia, en primer lugar, Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDPs) con el n de encontrar soluciones a un sistema de ecuaciones mediante algunos metodos variacionales que se estudiaran en el transcurso del texto. Es claro que las Ecuaciones Diferenciales (ED) modelan problemas de la realidad f sica y es dif cil encontrar una solucion. Los temas abarcados aqu son lo su cientemente necesarios para cumplir el n de encontrar soluciones a estos que, en la mayor a de los casos, son una formulacion variacional, es decir, se buscaran los puntos cr ticos del funcional en un espacio adecuado de funciones establecidas.

En un orden de ideas sistematica se encuentra, en el primer cap tulo, conceptos fundamentales de las ecuaciones diferenciales parciales como clasi cacion segun su tipo, orden, linealidad y segun su discriminante.

En el segundo cap tulo se estudiara los espacios donde esta ED tienen solucion que va acompa~nado de los espacios normados mas trasendentales donde se mostraran los teoremas mas importantes de cada uno de estos y se conoceran sus respectivas normas. En el tercer capitulo de de nen los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales y se muestran algunos metodos de solucion y por ultimo, en el cuarto cap tulo, se propone un ejemplo de un sistema de ecuaciones parciales el pticas de nuestra autor a, al cual se le encontrar su solucion que nos permitira aclarar todo el bagaje teorico que ha sido plasmado .

OBJETIVOS

0.0.1 Objetivo general

Analizar la existencia de la solucion positiva de sistemas de reaccion-difusion empleando metodos no lineales y/o variacionales.

0.0.2 Objetivos espec cos

Estudiar aspectos basicos de las EDP (orden, linealidad, grado) y una solucion general a un sistema de EDP.

Estudiar las diferentes propiedades y aplicaciones de analisis funcional para

EDP. Aplicar un metodo no tradicional para la solucion del sistema de EDP.

Establer el espacio de solucion y construir la formulacion debil para dicha EDP.

Hacer una revision importante sobre existencia y unicidad de soluciones para un sistema de ecuaciones en derivadas parciales.

Cap tulo 1

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES (EDPs)

En este cap tulo se abarcan aspectos importantes de las EDPs que seran de gran ayuda para dar solucion al problema que se propone en el texto. De manera similar que las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), las EDPs pueden clasi carse segun su grado, tipo y linealidad. Las de niciones que se encuentra a continuacion se tomaron de [10], [11], [12] y [17].

De nicion 1.1 Una ecuacion diferencial parcial (EDP), es aquella ecuacion que involucra derivadas de una o mas variables dependientes hacia una o mas variables independiente.

Dado un entero K 1 y sea un subconjunto abierto de R^n la EDP tiene la forma

$$F\ x_1; x_2; :::; x_n; u; \frac{@u}{@x_1}; :::; \frac{@u}{@x_n}; \frac{@}{@^{k_1} x_1 @^{k_2} x_2 ::: @^{k_n} x_n} = 0 \qquad (1);$$

tambien la podemos notar de la forma

$$F\,(D^k u(x); D^{k\ 1} u(x); :::; Du(x); u(x); x) = 0;$$

donde F es un campo escalar de nida como sigue:

$$F : R^{n_k}\ \ R^{n_{k\ 1}}\ \ :::\ R^n\ \ R\ \ U\,!\,R;$$

x_1; x_2; :::; x_n son las variables independientes y $k_1 + k_2 + ::: + k_n =$, para todo k_i de enteros no negativos, ademas $u = (x_1; x_2; :::; x_n)\ 2\ R^n$, son variables independientes que pueden ser expresadas en terminos de relacion funcional, siempre analiticas siempre y cuando pueda ser expresada como expansion en series de Taylor, lo cual es equivalente a decir que u tiene derivadas de cualquier orden en cualquiera de sus n variables.

Si u = ! R, x 2 y un vector de la forma = ($_1$; :::; $_n$), donde cada componente $_j$ es un entero no negativo, es llamado multiindex de orden

$$j\ j = \ _1 + ::: + \ _n;$$

dado un multiindex α, define

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}.$$

Si k es un entero no negativo,

$$D^k u(x) := \{D^\alpha u(x) / |\alpha| = k\}$$

el conjunto de todas las derivadas de orden K

$$|D^k u(x)| = \left(\sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}};$$

caso especial: si K = 1 el vector gradiente es

$$Du = (u_{x_1}; \ldots; u_{x_n}).$$

Si k = 2 consideraremos D^2u la matriz Hessiana

$$D^2u = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ & \ddots & \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}_{n \times n};$$

y el operador Laplaciano de u,

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = tr(D^2u).$$

Cuando la funcion $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$, para m > 1, k = 1, $u = (u^1; \ldots u^m)$ se define para cada multiindex

$$D^\alpha u = (D^\alpha u^1; \ldots; D^\alpha u^m)$$

, y

$$|D^k u(x)| = \left(\sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}};$$

como antes, en el caso especial si k = 1 se escribe la matriz gradiente como

$$Du = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u^1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u^m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u^m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{m \times n}.$$

Si m = n, la divergencia de u se nota por,

$$\mathrm{div}(u) = \mathrm{tr}(Du) = \sum_{i=1}^{n} u^1_{x_i} :$$

Como generalizacion se puede obtener para k un entero no negativo

$$D^k u(x) := \{D\, u(x) / |\,| = k\}:$$

En la sesion que sigue se clasi caran las EDPs teniendo en cuenta aspectos importantes como lo son: su linealidad, orden y segun su discriminante.

1.1 Clasi cacion de las EDPs

Las EDPs se clasi can segun orden, linealidad, y discriminante. Las de niciones junto con los ejemplos se pueden consultar en [5], [17], [11] y [12].

1.1.1 Segun su orden

De nicion 1.2 (Orden de una EDPs) Se entiende como orden de una EDP, al orden superior de las derivadas.

Ejemplo 1.3 .

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad y\frac{\partial u}{\partial y} = 1$$

esta EDP tiene dos derivadas parciales, una de primer orden y otra de segudo orden, as que EDP es de segundo orden y de grado 1.

Ejemplo 1.4 .

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + y\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

la EDP muestra claramente la diferencia entre grado y orden. Se puede ver aqu que la EDP es de orden 3 y grado 1.

Ejemplo 1.5 .

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^4;$$

se esta en el caso de una EDP de orden 2 y de grado 4.

1.1.2 Segun su linealidad

De nicion 1.6 (Linealidad de la EDP) La EDP (1) es lineal si u y todas sus derivadas parciales son lineales o de grado 1 en F.
Tambien si la EDP (1) tiene a forma,

$$\sum_{|\alpha|<k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x) \qquad (2)$$

donde k es un entero no negativo, la EDP (1) es lineal.
Se dice que la EDP (1) es semilineal si tiene la forma

$$\sum_{|\alpha|<k} a_\alpha(x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u; \dots; Du; u; x) = 0;$$

de manera similar la EDP (1) es quasilienal si tiene la forma,

$$\sum_{|\alpha|<k} a_\alpha(D^{k-1}u; \dots; Du; u; x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u; \dots; Du; u; x) = 0;$$

si la EDP (1) no es ninguna de las anteriores, entonces se entendera que es una EDP no lineal.

Ejemplo 1.7 .

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - 2u + 3xy = 0;$$

se observa que la EDP lineal ya que u es de grado 1 y las funciones que dependen de u son lineales.

Ejemplo 1.8 .

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 1 = 0;$$

la EDP es no lineal porque la deriada de u es de grado diferente a 1, en este caso la EDP es de grado 2.

Ejemplo 1.9 .

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 = (u\cos y)^2;$$

esta EDP es no lienal debido a que la funcion u es de grado 2.

1.1.3 Segun su descriminante

Una EDP de segundo orden, con dos variables independientes y coe cientes constantes, se puede clasi car segun su discriminante.

De nicion 1.10 Sea la EDP, de segundo orden, para la funcion de dos variables independientes x,y tienen la forma:

$$A(x;y)\frac{\partial^2 u(x;y)}{\partial x^2} + 2B(x;y)\frac{\partial^2 u(x;y)}{\partial x \partial y} + C(x;y)\frac{\partial^2 u(x;y)}{\partial y^2} +$$
$$a(x;y)\frac{\partial u(x;y)}{\partial x} + b(x;y)\frac{\partial u(x;y)}{\partial y} + c(x;y)u(x;y) = f(x;y)$$

donde A(x:y), B(x; y), C(x; y), a(x; y), b(x; y) y c(x; y) son funciones de variables x; y en una region D R^2, Se supone que en cierta region R^2, se tiene:

1. Hiperbolica: en , si $= B^2 \quad AC > 0$ en :
2. Parabolica: en , si $= B^2 \quad AC = 0$ en :
3. El ptica: en , si $= B^2 \quad AC < 0$ en :

Ahora se describira una a una las EDPs clasi cadas que son conocidas dentro del campo.

Ecuacion hiperbolica

Las ecuaciones de tipo hiperbolico describen fenomenos oscilatorios como: las vibraciones de cuerda, membranas, oscilaciones acusticas (de gas en los tubos) y oscilaciones electromagneticas, etc. El caso mas simple de tipo hiperbolico es la conocida ecuacion de vibraciones de cuerdas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{con } u = u(x;t);$$

donde x es la coordenada espacial, t el tiempo y $a^2 = \frac{T}{}$, T es la tension de la cuerda (se asume como constante) y es la densidad lineal (masa por unidad de area).

Al generalizar se tendra:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right);$$

que representan las ecuaciones de onda, de una, dos y tres dimensiones respectivamente. Esta ultima aparece en la teor a electromagnetica en relacion a la propagacion de ondas tales como las ondas de radio o television.

Si se introduce el operador derivada parcial se tiene:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2};$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

en el caso que u no dependa de t se tiene,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad o \quad \nabla^2 u = 0;$$

conocida como la ecuacion de Laplace, que mas adelante sera de nida. Ejemplo 1.11

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2;$$

tamb en podr a escribirse como:

$$4u_{xx} + 5u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 2;$$

se tiene una EDP lineal no homogenea, esta ecuacion diferencial es de tipo hiperbolico debido a que $A = 4$, $B = 5$ y $C = 1$ de modo que $(5)^2 \; (4)(1) > 0$

Ecuacion parabolica

Las EDPs de tipo parabolico modelan procesos de conductividad termica, ujo de calor y difusion de calor. En el caso unidimensional la ecuacion parabolica simple es :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad u = u(x; t);$$

con $a^2 = \frac{K}{c}$, llamado el coe ciente de difusividad del material, donde es la densidad del medio, c es el calor espec co y k el coe ciente de conductividad termica. La solucion $u = u(x; t)$ busca determinar cual es la temperatura de la barra en cualquier lugar y en cualquier tiempo.

Al igual que en el caso hiperbolico se puede tomar como ejemplo una conduccion de calor en tres dimensiones:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right); \quad u = u(x; y; z; t);$$

la EDP en terminos laplacianos es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\nabla^2 u;$$

cuando u no depende del tiempo, u se llama temperatura de estado estacionarioy se escribe como sigue,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad o \quad \nabla^2 u = 0:$$

Ejemplo 1.12 .

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu = \frac{\partial u}{\partial t};$$

que se escribe de modo que sigue,

$$ku_{xx} - hu = u_t;$$

esta es una EDP lineal no homogenea de tipo parabolico, $A = k$, $B = 0$ y $C = 0$ de modo que $(0)^2 - (k)(0) = 0$:

Ecuacion el ptica

Las EDPs de tipo el ptico, son ecuaciones independientes del tiempo, es decir, que se utilizan variables espaciales modelando fenomenos de potencial gravitatorio o electrostatico. Como se dijo anteriormente, cuando la ecuacion de calor y la ecuacion de cuerdas como la ecuacion del estado estacionario, la ecuacion el ptica mas conocidas es la ecuacion de Laplace (dos dimensiones).

De nicion 1.13 (Ecuacion de Laplace) Dado u, una funcion real de 2 variables, se de ne la ecuacion en R^n:

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0;$$

se conoce como la ecuacion de Laplace. Esta ultima EDP aparece en numerosos campos de la f sica e ingenier a, para modelar fenomenos estacionarios, es decir, no dependen del tiempo y son de gran importancia debido a que se involucra el operador laplaciano y este se encuentra en la mayor a de las ecuaciones.

Cuando la funcion es de n varibles se tiene el operador laplaciano,

$$u = \sum_{=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0;$$

que para el caso bidiminsional y tridemensional respectivamente se describen como sigue,

$$u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

$$u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0;$$

$$r^2 u = \quad u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0:$$

La ecuacion de Laplace es conocida como una ecuacion homogenea de EDP de Poisson y se escribe como sigue,

$$r^2 u = \quad u = \quad ;$$

donde es una funcion que depende de $x; y$.

Ejemplo 1.14

$$5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0:$$

Se tiene una EDP lineal homogenea de tipo el ptica debido a que $A = 5$, $B = \ 2$ y $C = 3$ de modo que $(\ 2)^2 \ (5)(3) < 0$:

Para concluir, la clasi cacion de EDP lineal, segun su discrimante, se tomar como ejemplo una EDP con coe cientes variables, es decir, que su clasi cacion var a en $(x_0; y_0) \ 2$ y empiezan a mirarse por casos:

Ejemplo 1.15

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 2x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u + 1;$$

en este caso, $A = 1$, $B = 2x$ y $C = y$, el discriminante ser a $4x^2 \ y$, el cual se analiz su comportamiento.

Si en , $4x^2$ y > 0, es decir, con y < 0 entonces la EDP es de tipo hiperbolico.
Si en la region , $4x^2$ y < 0, donde $4x^2$ < y la EDP es de tipo el ptico.
Por ultimo, se considera en la region : $4x^2$ y = 0, es decir, x = 0 y y = 0 la EDP es de tipo parabolico, aunque tamb en pod a verse que la curva $y = 4x^2$ esta formada por todos los puntos de parabolicidad.

Ejemplo 1.16

$$x \frac{@^2u}{@x^2} \; y \; \frac{@^2u}{@y^2} = 0;$$

en este caso, A = x, B = 0 y C = y, el descriminate que se analizar es $(o)^2$ xy:

Si x > 0 e y > 0 o x < 0 e y < 0, es decir, las variables tengan el mismo signo, entonces la EDP es de tipo el ptico en la region . Si x > 0 e y < 0 o x < 0 e y > 0, es decir, sus signos son opuestos, se tiene que la EDP es de tipo hiperbolico.

Por ultimo, se tiene el centro (0; 0), es decir, que x = y = 0 entonces la EDP es de tipo parabolico.

Se mostr una peque~na diferencia, o sentido de cambio, en la clasi cacion de EDP con coe cientes constates y coe cientes variables porque estas toman mayor importancia para la solucion de las EDPs.

1.1.4 Condiciones para la solucion de EDPs

Establecer la existencia y una unicidad de soluciones en las EDPs es un poco mas complejo que en las EDO, esto se debe a la gran variedad de elecciones para la funciones arbitrarias. As , para dar soluciones a EDPs es necesario imponersen condiciones adicionales para determinar un vocamente su solucion, estas condiciones se denominan iniciales o de contorno.

El problema de Cauchy para las ecuaciones de tipo hiperbolico y parabolico: se plantean las condiciones iniciales, la region coincide con todo el espacio R^n, las condiciones de frontera se omiten.

El problema de contorno para las ecuaciones de tipo el ptico: se plantean las condiciones de la frontera S de la region de manera natural, las condiciones iniciales se omiten.

El problema mixto para las ecuaciones de tipo hiperbolico y parabolico: se plantean las condiciones iniciales y las de frontera, 6= R^n.

1.2 Solucion general de las EDPs

En esta seccion se estudiara los metodos de integral completa y separacion de variables para solucionar EDPs de forma anal tica, se limitara a encontrar soluciones particulares utilizando condiciones iniciales o de contorno ya que la solucion general no tiene mucha relevancia y no son muy utiles cuando se re ere a sus aplicaciones. Cuando se obtiene soluciones generales, se asociada m funciones arbitrarias tomadas como constantes por no tener condiciones que aclarezcan la solucion. La funcion

$$u :! R;$$

se llama solucion de la EDP en de variaciones de las x_i , $8i = 1; 2; :::; n$, donde es cualquier funcion $u = u(x_1; x_2; :::; x_n)$ 2 $C^m($ $)$, tal que al sustituir a u y sus derivadas en (1) se convierte en la identidad.

Teorema 1.17 Si $u(x; y)$ es la solucion de la EDP lineal homogenea, entonces $ku(x; y)$ es tambien solucion de la homogenea para k 2 R:

Teorema 1.18 si $u_1(x; y)$ y $u_2(x; y)$ son soluciones de la EDP lineal homogenea, en-tonces $u_1(x; y) + u_1(x; y)$ es tambien solucion de la ED lneal homogenea.

Corolario 1.19 Si cada una de las funciones $u_i(x; y)$, $8i = 1; 2; :::; k$ es la solucion de la EDP homogenea, entonces:

$$\overset{k}{\underset{i=1}{X}} c_i u_i(x; y);$$

es tambien solucion de la ecuacion homogenea (1), donde c_i 2 R, $i = 1; 2; :::n$

1.2.1 Integracion directa

Este metodo es utilizado para resolver EDPs de primer orden que de algun modo u otro mediante varias integraciones se llega a la solucion, si desea saber mas del tema consultar [17].

Ejemplo 1.20 Encontrar la solucion de la ecuacion diferencial.

$$\frac{@^2u}{@y^2} = x^2 cosy \quad u(x; 0) = 0 \quad u \;\; x; \; \overline{} \; 2 = 0$$

$$\frac{@}{@y}\frac{@u}{@y} = x^2 cosy$$

$$Z \; \frac{@u}{@y} dy = Z \; x^2 cosy \; dy$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 \operatorname{sen} y + {}_1(x)$$

$$u = \int (x^2 \operatorname{sen} y + {}_1(x))dy$$

$$u = x^2 \cos y + {}_1(x)y + {}_2(x)$$

observese que tanto $_1$ y $_2$ son funciones constantes de integracion resultantes de la solucion general de la ED, ahora como primer condicion $u(x; 0) = 0$, obteniendo:

$$u = x^2 + {}_2(x) = 0$$

de modo que $_2(x) = x^2$, lo que nos lleva a

$$u = x^2 \cos y + x^2 + {}_1(x)y$$

y con la condicion $u\ x; \frac{}{2} = 0$ se tiene

$$u = x^2 + {}_1 \frac{}{2} = 0$$

donde $_1(x) = \frac{2x^2}{}$, encontrando la solucion particular que cumple con las condiciones propuestas

$$u = x^2 \cos y + x^2 \frac{2x^2 y}{}$$

la funcion u pertenece a las funciones de clase C^2 que junto con sus derivadas satisface la EDP.

1.2.2 Separacion de variables (MSV)

El metodo de separacion de variables es utilizado para EDP homogeneas, para resolverla, se supone una funcion solucion

$$u(x; y) = X(x)Y(y) = XY;$$

esta funcion tambien puede ser generalizada para EDPs de orden n, teniendo una solucion a la EDP

$$u(x_1; x_2; \ldots; x_n) = X_1X_2\ldots X_n;$$

al suponer esta solucion, se transforman las funciones de la siguiente manera:

$$u_x(x;y) = X^0Y;$$
$$u_y(x;y) = XY^{\,0};$$
$$u_{xy}(x;y) = X^0Y^{\,0};$$
$$u_{xx}(x;y) = X^{00}Y;$$
$$u_{yy}(x;y) = XY^{\,00};$$

donde sus variables quedan totalmente independiente una de la otra, lo que hace el metodo es llevar las EDPs a EDO, luego de separar las variables se igualan a una constante conocida como constante de separacion, para nalizar se resuelve las EDO y luego las multiplicamos sus soluciones para obtener una solucion completa de la EDP. Una de las limitaciones de este metodo es que las EDPs tienen que ser lineales, para entender un poco mas de lo que expresamos se tomar el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.21

$$4\frac{@y}{@t} + \frac{@y}{@x} = 3y \quad y(x;0) = 4e^{\,x}\ e^{\,5t};$$

se suponem la funcion solucion particular $y(x;t) = XT$, junto sus respectivas derivadas se tiene:

$$4XT^{\,0} + X^0T = 3XT;$$

si se divide en $4XT$ y se supone que es diferente de cero, agrupando e igualando a la constante de separacion, se tiene que un lado de la igualdad solo depende de T mientras el otro lado solo depende de X,

$$\frac{T^{\,0}}{T} = \frac{3X \quad X^0}{4X} = \quad ;$$

obteniendo dos EDO de primer orden,

$$\frac{T^{\,0}}{T} = \quad ; \qquad \frac{X^0}{X} = 3 \quad 4 \quad ;$$

y sus soluciones son respectivamente

$$T = a_1e^{\,t};$$
$$X = a_2e^{3\quad 4}\,x;$$

que al remplazarlas en la solucion propuesta se concluye que la solucion es:

$$y(x;t) = T\,X = a_1e^{\,t}a_2e^{(3\quad 4\ )x} = Ae^{(3\quad 4\ )x+\ t} \qquad \text{con} \quad A = a_1a_2:$$

Ahora como la solucion esta sujeta a la condicion,

$$y(x; 0) = Be^{(3 \quad 4 \quad)x} = 4e^{\quad x} \qquad e^{\quad 5t};$$

como se puede observar no se puede determinar una relacion clara en la igualdad y pareciese que el metodo no funciona pero por el teorema 1.18 y el corolario 3.19 se encuentran las soluciones,

$$y_1(x; t) = b_1 e^{(3 \quad 4 \quad)x} \quad ;$$

$$y_2(x; t) = b_2 e^{(3 \quad 4 \quad)x} \quad ;$$

son soluciones de la EDP mediante el principio de superposicion, como consecuencia de la unicidad se tiene

$$b_1 e^{(3 \quad 4 \quad _1)x} + b_2 e^{(3 \quad 4 \quad _2)x} = 4e^{\quad x} e^{\quad 5t};$$

donde $3 \quad 4 \quad _1 = \quad 1 \;) \quad _1 = 1$, $3 \quad 4 \quad _2 = \quad 5 \;) \quad _2 = 2$, $b_1 = 4$ y $b_2 = \quad 1$ teniendo nalmente como solucion particular

$$y(x; t) = 4e^{\quad x+t} \qquad e^{\quad 5x+2t}.$$

Cap tulo 2

ESPACIOS DE SOLUCION PARA EDPs

En este cap tulo se mostrara las normas inducidas en espacios vectoriales y la estructura que esta lleva, no sera un cap tulo tan practico sino mas bien de forma general teorico que junto con algunos conocimientos de analisis no sera de gran di cultad, las de niciones, teoremas, proposiciones y colorarios para este cap tulo se tomaron de [1], [6], [9], [12], [13], [14] y [16] .

2.0.1 Espacios Normados

De nicion 2.1 Sea X un espacio vectorial y dada la norma

k k : X ! K
x ! kxk

Entonces la estructura (X; k k) se llama espacio normado si cumple:
(A1) kxk 0 y kxk = 0 , x = 0
(A2) k xk = j jkxk, 2 K, x 2 X

(A3) kx + yk kxk + kyk 8x; y 2 X

La propiedad (A3) es conocida como la desigualdad triangular. Al par (X; k k) se llama espacio normado.

De nicion 2.2 Sea X un conjunto no vac o, de nimos una funcion

d : X X ! R
(x; y) ! d(x; y)

(A1) d(x; y) 0; d(x; y) = 0 , x = y 8x; y 2 X
(A2) d(x; y) = d(y; x), 8x; y 2 X

(A3) d(x; y) d(x; z) + d(z; y) 8x; y; z 2 X (Desigualdad triangular)

Al par $(X; d)$ se llama espacio metrico.

El numero real positivo $d(x; y)$ se llama distacia de x a y, un ejemplo importante es la recta R con la distancia usal entre dos puntos de nida como:

$$d(x; y) = |x - y|$$

Corolario 2.3 Todo espacio normado es espacio metrico si la metrica es inducida por la norma.

$$B_r(x) = \{y \in X / d(x; y) \leq r\}$$

$$d(x; y) = \|x - y\| \quad x; y \in X$$

De nicion 2.4 Un espacio normado X se dice que es separable si existe algun subcon-junto A de X numerable tal que $X = \overline{A}$.

As , cuando se habla de metrica se re ere a una generalizacion del concepto de distancia en un espacio euclidiano, los conjuntos abiertos aqu de nidos constituyen una topolog a y se conoce como las topolog a de la norma.

2.0.2 Espacios de Banach

De nicion 2.5 Sea $(X; \| \|)$ un espacio normado y $(x_n)_1^{\infty}$ una sucesion en X, entonces $(x_n)_1^{\infty}$ es de Cauchy si:

paratodo $\epsilon > 0$, existe un $n_0 \in N$ tal que

$$d(x_n; x_m) = \|x_n - x_m\| < \epsilon \quad \text{si } m; n > n_0$$

$$\lim_{\to\infty} d(x_n; x_m) = \lim_{\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0:$$

De nicion 2.6 Un espacio normado $(X; \| \|)$ se llama espacio de banach si cada sucesion de Cauchy en X es convergente a un elemento $x \in X$, notese que si es un espacio nor-mado $(X; \| \|)$ es un espacio de Banach, entonces X es un espacio de Banach con cualquier norma equivalente a la norma $\| \|$, si $X = R^n$ se tiene las siguientes normas equivalentes

$$\|(x_1; :::; x_n)\|_1 = \sum_{=1}^{n} |x_i|$$

$$\|(x_1; :::; x_n)\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|(x_1; :::; x_n)\|_1 = \sup_{1 \leq k \leq n} |x_i|:$$

A partir de esta de nicion se deduce que: la sucesion de Cauchy indica que la sucesion es acotada y que mediante la integral de lebesgue estas son medibles.

Corolario 2.7 Toda sucesion convergente es de Cauchy.

Corolario 2.8 Una sucesion de Cauchy no necesariamente es convergente.

Este ultimo colorario depende del espacio donde se induce la sucesion. Entre los espacios de Banach tenemos ejemplos que son de gran importancia en el estudio del analisis, a partir de ello se tiene:

2.0.3 Espacios de Hilbert

De nicion 2.9 Sea X un espacio vectorial sobre el campo K ($K=R$ o C)

$$\langle \cdot ; \cdot \rangle : X \times X \to R$$

se llama producto escalar o interno si cumple:

(i) $\langle x + y; z\rangle = \langle x; z\rangle + \langle y; z\rangle \quad x; y; z \in X$

(ii) $\langle \lambda x; y\rangle = \lambda\langle x; y\rangle \quad x; y \in X; \quad \lambda \in K$

(iii) $\langle x; x\rangle > 0 \quad x \in X; x \neq 0$:

NOTA: Las propiedades (ii) y (iii) se modi can por

(iv) $\langle x; y\rangle = \overline{\langle y; x\rangle} \quad x; y \in X; \quad \lambda \in K$

(v) $\langle x; \lambda y\rangle = \bar{\lambda}\langle x; y\rangle \quad x; y \in X; \quad \lambda \in K$

De nicion 2.10 Un espacio $(X; \langle \cdot ; \cdot \rangle)$ dotado de un producto escalar es un espacio prehilbertiano.

En el caso que el espacio prehilbertiano $(X; \langle \cdot ; \cdot \rangle)$ sea completo respecto a la norma $\|x\| = \sqrt{\langle x; x\rangle}$, se denomina espacio de Hilbert.
Los conjuntos as de nidos cumplen la siguiente proposicion.

Proposicion 2.11 Sea $(X; \langle \cdot ; \cdot \rangle)$ un espacio prehilbertiano, entonces

(i) $\| \cdot \| : X \to R^+$ es continua

(ii) $\langle \cdot ; \cdot \rangle : X \times X \to K$ es continua

(iii) $+ : X \times X \to K$ de nida por $(x; y) \to x + y$ es continua.

(iv) $\cdot : K \times X \to K$ de nida por $(\lambda; x) \to \lambda x$ es continua.

De nicion 2.12 Si $X \perp Y$ entonces

$0 = \langle x; y\rangle = \overline{\langle x; y\rangle} = \langle y; x\rangle = y \perp x$ son ortogonales $\forall\, x \in X; y \in Y$.

2.0.4 Espacios L^p

Antes de dar un acercamiento a los espacios L^p se consideraran algunos conceptos de importancia para comprender estos espacios de mejor manera.

De nicion 2.13 (Medida de Lebesgue) Considerando una coleccion A como de subconjuntos de R^n es llamadaalgebra si cumple las siguiente condiciones: P

(i) $R^n \in \sum$:

(ii) $A \in \sum$, entonces $A^c = \{x \in R^n : x \notin A\} \in \sum$:

(iii) Si $A_j \in \sum$; j = 1; 2; :::; entonces $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \sum$:

(iv) $? \in \sum$:

(v) Si $A \in \sum$; j = 1; 2; 3:::, entonces $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \sum$:

(vi) Si $A; B \in \sum$, entonces $A - B = A \setminus B^c \in \sum$:

A partir de esto es establecida una medida 2 siendo esta una funcion en que toma valores en cualquier medida (real o P P

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty}(A_j):$$

Los conjuntos de P son llamados los subconjuntos medibles (Lebesgue) de R^n, para de nir la integral de las funciones medibles en un conjunto de medida $A \subset R^n$, donde cada $A_j \subset A$ es medible, se tiene:

$$\int_A s(x)dx = \sum_{j=1}^{\infty} a_j (A_j);$$

con s(x) la union de todos los subcojuntos medibles , si f es medible y de valores no negativos se de ne

$$\int_A f(x)dx = \sup \int_A s(x)dx;$$

as y asumiendo que toda funcion a no ser de que se aclare es medible podremos a rmar que:

(a) Si f es acotada en A y (A) < 1, entonces $f \in L^1$:

(b) Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in A$ y si ambas integrales existen, entonces

$$\int_A f(x)dx \leq \int_A g(x)dx:$$

(c) Si $f; g \in L^1(A)$, emtonces $f + g \in L^1(A)$

$$\int_A (f+g)(x)dx = \int_A f(x)dx + \int_A g(x)dx:$$

(d) Si $f \in L^1$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces $cf \in L^1$

$$\int_A (cf)(x)dx = c\int_A f(x)dx.$$

(e) Si $f \in L^1$, entonces $|f| \in L^1$

$$\left|\int_A f(x)dx\right| \leq \int_A |f(x)|dx.$$

Al considerar que Ω es un dominio en $\mathbb{R}^n$ y p un numero positivo, se denota por L^p la clase de todas las funciones medibles u definidas en Ω: como sigue,

$$L^p(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ es medible y } |f|^p \text{ es integrable lebesgue en } \Omega\};$$

con,

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty.$$

De manera que la funcion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ y esta dotada con las normas:

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}; \text{ si } 1 \leq p \leq \infty;$$

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_p = \inf\{\lambda : |u(x)| \leq \lambda \text{ en } \Omega\}; \text{ si } p = \infty.$$

Notemos que en K que pueden ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, la $\|\ \|_p$ es una norma que pueden que medir casi cualquier funcion siempre y cuando sea continua.

Teorema 2.14 $(L^p; \|\ \|_p)$ es un espacio normado.

La demostracion es evidente para (A1),para verificar la propiedad (A2) se sigue de :

$$\|\lambda x\| = \left(\int |\lambda x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\lambda|^p \int |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\int |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|x\|;$$

por ultimo la (A3) es consecuencia de la desigualdad de Minkowski.

Corolario 2.15 (desigualdad de Minkowski) sea $p > 1$ $x = (x_1; x_2; \dots; x_n) \in K^n$ y $y = (y_1; y_2; \dots; y_n) \in K^n$, entonces

$$\left(\int |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}};$$

Demostracion:

$$\int |x_i+y_i|^p \le \int |x_i||x_i+y_i|^{p-1} + \int |y_i||x_i+y_i|^{p-1};$$

$$\le \left(\int |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |x_i+y_i|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \left(\int |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |x_i+y_i|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\int |x_i+y_i|^p \le \left(\int |x_i+y_i|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right];$$

esto es

$$\left(\int |x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}:$$

Definicion 2.16 Dos numeros reales p y q se dicen conjugados armonicos si

$$p > 1; \ q > 1 \ \text{y} \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;$$

observese que:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff (p-1)(q-1) = 1 \iff (p-1)q = p \iff (q-1)p = q:$$

Corolario 2.17 (desigualdad de Holder-Minkowski) Sea p y q conjugados armonicos donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $x = (x_1; x_2; :::; x_n)$, $y = (y_1; y_2; :::; y_n) \in K^n$:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Espacios de Sobolev

En primer lugar observese la importancia que tienen las funciones continuas y la ayuda que brinda para entender dichos espacios.

De nicion 2.18 Sea R^n un dominio abierto y conexo, para algun entero no negativo m, se tiene el espacios vectorial $C^m(\ )$, consiste en todas las funciones que junto todas sus derivadas parciales D de orden j j m son continuas en , si
2 C( ) es acotada y uniformemente continua en , entonces estas posee una unica extension continua a su clausura ( ) de , tenemos as :

$$kC^m(\ \overline{\ })k = {}_{0<j<n}{}^{max}{}_{x}{}^{sup}{}_{2}\ jD\,(x)j:$$

De nicion 2.19 Sea R^n un dominio abierto conexo y 0 < 1 se de ne la continuida de Holder como

$$ju(x)\quad u(y)j\quad Kjx\qquad yj\ ;$$

$$jD(x)\quad D\qquad (y)j\qquad Kj\ (x)\quad (y)j\ ;$$

como caso particular, la funcion u : ! R, es lipschitz, si = 1;

$$ju(x)\quad u(y)j\quad Kjx\qquad yj;$$

para alguna constante K y todo x; y 2 . Lo que implica que u es continua y lo mas importante es que el modulo es uniformemente continuo. El espacio Holder $C^{m;}$ ( ) dotado de la norma

$$kuk_{C^{m;}(\ )} = \sum_{j\ j\ m} kD\ uk_{C(\ \overline{\ })} + \sum_{j\ j\ m} [D\ ]_{C^{0;}(\ ); \overline{\ }}$$

consiste en aquellas funciones u contiuamente diferenciables y aquellas m^{th} derivadas parciales continuas en Holder con el exponete , de lo que podr a tenerse para 0 < v < 1, donde v; R:

$$C^{m;}\quad (\ C^{m;v}\ (\ C^{m}:$$

De nicion 2.20 (Compacidad) Sea G X un abierto del espacio normado X, este es compacto si cada sucesion de puntos en G tiene una sub-sucesion convergente en X.

Los elementos de G no necesitan ser acotados cuando este es de dimension nita porque se puede hacer un recubrimiento de abiertos y es compactos.

De nicion 2.21 (Soporte compacto) Si u es una funcion de nida en G, de nimos el soporte de u,

$$\text{supp } u = \overline{\{x \in G : u(x) \neq 0\}}:$$

Se dice que u tiene soporte compacto en si supp u , es decir, desde que el soporte de u sea compacto en .

De nicion 2.22 (Funciones test) Sea un dominio en R^n, una sucecion $f\ _n g$ de funciones pertenecientes a $C_o^1(\ )$, es convergente en el sentido del espacio D( ) a la funcion $2\ C_o^1(\ )$ si satisface:

i) Existe Kpara el cual supp(n) K para todo n

ii) $\lim_{n!1} D\ _n(x) = D\ (x)$ uniforme en K para cada multi-index ;

el espacio $C_o^1(\ )$ con topologia localmente convexa con : ! R, donde el funcional

T es continuo si y solo si T ($_n$) ! T ( ) en C, cuando $_n$! en el sentido del espacio D( ), el espacio D( ) no es normado donde sus elementos son conocidas como funciones test.

Teniendo una funcion u de nida en casi en cualquier parte de , se dice que es localmente integrable en siempre que u 2 $L^1(A)$ para cada medida A , que es lo mismo que si de nimos una funcion u 2 $L^1_{loc}(\ )$ en el sentido de las distribuciones $T_u D^0(\ )$:

$$T_u(\ ) = \int u(x)\ (x)dx \quad 2\ D(\ ):$$

Sea u 2 $C^1(\ )$ y 2 D( ) donde se anula fuera de un subconjunto compacto de , se tiene al integrar por partes

$$\int \frac{@u(x)x_j}{@}\ (x)dx = \int u(x)\ \frac{@x_j}{@\ (x)}\ dx;$$

De nicion 2.23 (Derivada debil) Si u; v 2 u 2 $L^1_{loc}(\ )$, se dice que v es la th derivada debil de um teniendo:

$$D\ = v$$

provando

$$\int u(x)D\ \ (x)dx = (\ 1)\ \int v\ \ (x)dx \quad 8\ 2\ D(\ ):$$

Entendiendo as el concepto de derivada debil de una funcion localmente integrable, a partir de las de niciones 2:22 y 2:23 se de ne los espacios de sobolev .

Definicion 2.24 (Espacio $W^{1,p}(\Omega)$) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leqslant p \leqslant \infty$ se define el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ por

$$W^{1,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega)\} : \exists g \in L^p\};$$

tal que

$$\int_\Omega u\varphi' = \int_\Omega g\varphi; \qquad \forall \varphi \in C^\infty(\Omega):$$

Se da como resultado de la integracion por partes, si $u \in C^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, $u' \in (\Omega)$ siendo u' la derivada usual y φ una funcion test con supp $\varphi \subset [a; b] \subset \Omega$,

$$\int_\Omega u\varphi' = \int_a^b u\varphi' = u\varphi|_a^b - \int_a^b u'\varphi = -\int_\Omega u'\varphi;$$

donde $g = u'$, es llamada la derivada debil de u y las funciones φ se les conoce como funciones test, al espacio $W^{1,p}$ lo dotamos con la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p};$$

que equivalente a tener

$$\|u\|_{W^{1,p}} = (\|u\|^p_{L^p} + \|u'\|^p_{L^p})^{\frac{1}{p}}:$$

Definicion 2.25 Dado $k \geqslant 2$ y $1 \leqslant p \leqslant \infty$ el espacio $W^{k,p}$, esta conformado por todas las funciones localmente medibles $u : \Omega \to \mathbb{R}$, por consecuencia del espacio $W^{1,p}(\Omega)$, se define el espacio

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in W^{k-1,p}(\Omega); u' \in W^{k-1,p}\};$$

para cada multiindex α con $|\alpha| \leqslant k$ y $D^\alpha u$ existe en el sentido debil y pertenece $L^p(\Omega)$

$$\int_\Omega u D^\alpha\varphi = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega g_j\varphi \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty;$$

donde $g_j = D^\alpha u$ es la derivada debil u, dotamos este espacio de la norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ \sum_{|\alpha| \leqslant k} \operatorname{ess\,sup}_\Omega |D^\alpha u| \end{cases}$$

Definicion 2.26 Dado $1 \leqslant p \leqslant \infty$, se designa por $W_0^{k,p}(\Omega)$ a la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{k,p}(\Omega)$, es decir, $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ si existe una funcion $u_m \in C_0^\infty(\Omega)$ de modo que $u_m \to u$ en $W_0^{k,p}(\Omega)$ que para todo $|\alpha| \leqslant k-1$:

$$D^\alpha u = 0 \quad \partial\Omega:$$

Para nalizar observemos algunos resultados importantes de los espacios $L^2(\ )$, esto se debe a su relacion con los espacios de Hilbert y Sobolev.

Sea $L^2(\ )$ con la norma $k\ k_2$ esta inducida por el producto escalar

$$hu; vi_{L^2(\ )} = \int u(x)v(x)dx = h5u(x); 5v(x)idx:$$

$$\text{Si } L^2 = fu : \quad ! K : \sum_2 jf(\ )j^2 g < 1;$$

$$kuk^2 = \sum_2 ju(\ )j^2;$$

que proviene del producto interno $hf; gi = \sum f(\ )\overline{g(\ )}$, entonces si dotamos $L^2(\ )$ de una norma se tiene:

$$kuk_{L2} = \left(\sum_i^n \ldots \right)^{\frac{1}{2}}$$

tambien conocida como la norma Euclidiana, teniendo as que $(L^2; k\ k_2)$ es un espacio de Hilbert, por otra parte, el espacio $W^{k;p}(\ )$, donde k es la K esima derivada de C( ) y p determina la medida de lebesgue, se tiene como un resultado importante

$$W^{k;p}(\ )$$

$$W_0^{k;2}(\ ) = H_0^k(\ );$$

$$W^{0;2}(\ ) = L^2(\ );$$

las equivalencias $W^{0;2}(\ ) = H^0(\ ) = L^2(\ )$son espacios de Hilbert, por otro lado tenemos que $W_0^{1;p}(\ )$ con la norma inducida por el espacio $W^{1;p}(\ )$ es un espacio separable cuando $p \neq 1$ de no ser asi, es decir, que $p = 1$, $H_0^1(\ )$ es un espacio de Hilbert separable y su espacio dual es $H^{1}(\ )$, identi cando que $L^2(\ )$ se identi ca de igual modo con el dual pero no con $H_0^1(\ )$, es decir:

$$H_0^1(\ )\ L^2(\ )\quad H^{1}(\ );$$

y $W^{1;q}(\ )$ el dual de $W_0^{1;p}(\ )$ y de igual modo ocurre que

$$W_0^{1;p}(\ ) \qquad L_2(\ ) \quad W^{1;q}(\ ):$$

Unos de los resultados mas importantes en $H^1(\ )$ es que se dota del producto escalar $hu; vi_{H^1} = hu; vi_{L^2} + hu^0; v^0i_{L^2}$

con la norma asociada

$$kuk_{H^1} = \left(kuk^2_{L2} + ku^0k^2_{L2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

que es equivalente a la norma $W^{1;2}(\ )$:

Cap tulo 3

SISTEMAS DE ECUACIONES

En este cap tulo, se de nen los sistemas de ecuaciones diferenciales y se solucionan mediante metodos convencionales, una aproximacion a la aplicacion en la f sica, por ejemplo, es el paso de agua por dos tanques donde se agrega sal a uno de estos y se desea saber la velocidad de cambio por el paso de los tanques, se sabe que requiere el uso de dos o mas variables dependientes, cada funcion con una variable independiente, en el mayor de los casos es el tiempo. Las de niciones y ejemplos trabajados dentro de este cap tulo fueron tomados de [5], [10] y [15].

De nicion 3.1 (Sistema de ecuaciones ordinarias) Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias es un conjunto de dos o mas ecuaciones diferenciales ordinarias en las que aparece una o mas funciones dependientes $x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n$ de la forma:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t; x; x_1; \ldots; x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t; x; x_1; \ldots; x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t; x; x_1; \ldots; x_n); \end{cases} \qquad (3)$$

que puede ser escrita como

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t). \end{cases} \qquad (4)$$

De nicion 3.2 (Sistemas de ecuaciones lineales) Si cada funcion $f_1(t); f_2(t); \ldots; f_n(t)$, y la variable dependiente $x(t)$ junto con sus respectivas derivadas son lineales, entonces

(4) es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales.

De nicion 3.3 (Solucion de un sistema de ecuaciones) La solucion del sistema (4), en algun intervalo $a < t < b$, es un conjunto de n funciones derivables

$$x_1 = \ {}_1(t);\ x_2 = \ {}_2(t);\ :::;\ x_n = \ {}_n(t);$$

que al sustituirlas satisface identicamente en todo el intervalo.

De nicion 3.4 (Problemas con valores iniciales) Un problema con valor inicial para el sistema (4) se compone de n condiciones iniciales dadas,

$$x_1(t_0) = K_1;\ x_2(t_0) = K_2;\ :::;\ x_n(t_0) = k_n(t);$$

donde t_0 es un valor especi co de t en el intervalo $a < t < b$ y $K_1; K_2; :::; K_n$ son numeros dados.

A partir de las de niciones 3.3 y 3.4 se sigue el teorema de existencia y unicidad

Teorema 3.5 (Existencia y unicidad para sistemas lineales) Sean $f_1(t); :::; f_n(t)$ funciones continuas que contienen derivadas parciales continuas $\frac{@f_1}{@x_1}; :::; \frac{@f_n}{@x_n}$ en algun dominio R del espacio $y_1; y_2; :::; y_n$ que contiene el punto $(t_0; K_1; :::; K_n)$, entonces el sis-tema de ecuaciones diferenciales (4) tiene solucion en algun intervalo $t_0 < t < t_0 +$ que satisface las condiciones iniciales

$$y_1(t_0) = K_1; \quad y_2(t_0) = K_2 \quad y_n(t_0) = K_n;$$

y esta es solucion unica.

Las n condicionres iniciales son necesarias para determinar la solucion de un sistema de n ecuaciones lineales, lo que implica que en la solucion general de un sistema de ecuaciones diferenciales se involucran n constantes arbitrarias.

A continuacion, se observara algunos metodos que son utilizados para dar solucion a sistemas de ecuaciones siendo detallados lo mejor posible, entre estos esta, solucion por eliminacion, operadores diferenciales y por el metodo de valores y vectores propios.

3.1 Solucion por eliminacion a una EDO

Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x; y; t) \\ \frac{dy}{dt} = f_2(x; y; t); \end{cases}$$

$$x^0 = a_1x + b_1y + f_1(t);$$

$$y^0 = a_2x + b_2y + f_2(t);$$

donde $x(t); y(t)$ son funciones desconocidas, $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son funciones dadas y $a_1; a_2; b_1; b_2$ son constantes, a partir de la primer ecuacion se tiene:

$$b_1y = x^0 \quad a_1x \quad f_1(t);$$

derivando la primer ecuacion y en la ecuacion resultante se sustituye y^0 $x00 = a_1x^0 + b_1y^0 + f_1{}^0(t);$

$$= \quad a_1x^0 + b_1(a_2x + b_2y + f_2(t)) + f_1{}^0(t);$$
$$= \quad a_1x^0 + b_1a_2x + b_2(x^0 \quad a_1x \;\; f_1(t)) + b_1f_2(t) + f_1{}^0(t);$$

si se agrupan terminos se obtiene una ecuacion de segundo orden que puede resolver por metodos de EDO.

$$x^{00} \quad (a_1 + b_2)x^0 + (a_1b_2 \;\; b_1a_2)x = b_1f_2t \quad b_2f_1t + f_1{}^0(t);$$

al resolver la ED anterior se obtiene $x(t)$, remplazando $x(t)$ y su derivada en

$$x^0 = a_1x + b_1y + f_1(t);$$

se obtiene $y(t)$, entonces $x(t); y(t)$, es la solucion general del sistema de ecuaciones diferenciales planteado inicialmente.

Ejemplo 3.6 .Encuentrese la solucion general del sistema y luego encontrar una solucion particular con las condiciones iniciales $x(0) = 2$, $y(0) = 1$.

$$x^0 = x \;\; 2y$$
$$y^0 = 2x \;\; 3y:$$

$$y = \frac{x}{2}\, x^0 \,;\, \underline{2}$$

derivando la segunda ecuacion y remplazando y^0

$$x^{00} = x^0 \; 2y^0;$$

$$x^{00} = x^0 \quad 2(2x \quad 3y);$$

$$x^{00} = x^0 \quad 4x + 6(\frac{x}{2} \quad \frac{x_0}{2});$$

$$x^{00} + 2x^{0} + x = 0;$$

se obtuvo una ED con coe cientes constantes donde sus raices son:

$$_1 = \quad 1 = \quad _2;$$

y su respectiva solucion es

$$x(t) = C_1e^{\ t} + C_2te^{\ t};$$

ahora remplazando x(t) y su derivada en la funcion y(t) se obtiene la segunda solucion

$$y(t) = \frac{x}{} \quad \frac{x_0}{};$$

$$y(t) = C_1e^{\ t}C_2te^{\ t} \quad \frac{C_2}{2}{}^2 e^{\ t};$$

dando las condiciones iniciales para hallar el valor de sus constantes x(0) = 2 y y(0) = 1

$$x(t) = C_1e^{\ t} + C_2te^{\ t};$$

$$y(t) = C_1e^{\ t} + C_2te^{\ t} \quad \frac{C_2}{2}e^{\ t};$$

$$x(0) = C_1 + C_2 = 2;$$

$$y(0) = C_1 \quad \frac{C_2}{2} = 1;$$

resolviendo el sistema tenemos que $C_1 = \frac{4}{3}$ y $C_2 = \ \frac{2}{3}$, se tiene como solucion general al sistema de ecuaciones

$$x(t) = \frac{4}{3}e^{\ t} + \frac{2}{3}te^{\ t};$$

$$y(t) = \frac{4}{3}e^{\ t} + \frac{2}{3}te^{\ t} \quad \frac{1}{3}e^{\ t}:$$

3.2 Solucion por operadores diferenciales

Se entendera por operador diferencial, una transformacion que convierte una funcion derivable en otra funcion y se denota por "D", que signi ca:

$$\frac{dy}{dx} = Dy:$$

Si se toma la ecuacion diferencial (1) de n-esimo orden del primer cap tulo, mediante operadores tiene la forma

$$F(D^k u(x); D^{k\ 1}u(x); :::; Du(x); u(x):x) = 0 \quad (x \ 2 \quad);$$

que tambien puede verse como

$$L[D] = a_n(x)D^n + a_{n\ \ 1}(x)D^{n\ \ 1} + ::: + a_1(x)D + a_0(x);$$

siendo L[D] el operador diferencial de n-esimo orden, este metodo funciona en ED con coe cientes constantes, se transforman en un polinomio y su solucion se reduce a una operacion algebraica, tomando la ecuacion diferencial de coefcientes constantes de segundo orden se lleva a operadores diferenciales teniendo

$$L[y] = (D^2 + aD + b)y = y00 + ay0 + by;$$

ahora se tomar el ejemplo ilustrado en el metodo anterior y buscara solucion mediante operadores.

Ejemplo 3.7 .Encuentrese la solucion general del sistema y luego encontrar una solucion particular con las condiciones iniciales $x(0) = 2$, $y(0) = 1$:

$$x^0 \quad x + 2y = 0;$$

$$y^0 \quad 2x + 3y = 0;$$

por medio de operadores se tiene

$$(D \quad 1)x + 2y = 0;$$

$$2x + (D + 3)y = 0;$$

el determinante operacional del sistema es

$$(D\,1)(D + 3) \quad (\ \ 2)(2) = 0;$$

$$D^2 + 2D + 1 = 0;$$

$$D_1 = \quad 1 = D_2;$$

y las soluciones seran

$$x(t) = C_1e^{\ t} + C_2te^{\ t};$$

$$y(t) = C_3e^{\ t} + C_4te^{\ t};$$

ahora rempazando x(t) y y(t) en el sistema tenemos:

$$a) \quad 2C_3e^{\ t} + 2C_4te^{\ t} \quad 2C_1e^{\ t} \quad 2C_2te^{\ t} = \quad C_4e^{\ t};$$

$$(2C_3 \quad 2C_1)e^{\ t} + (2C_4 \quad 2C_2)te^{\ t} = \quad C_4e^{\ t};$$

$$2C_3 \quad 2C_1 = \quad C_4;$$

$$2C_4 \quad 2C_2 = 0;$$

b) $2C_1e^{t} \quad 2C_2te^{t} + 2C_3e^{t} + 2C_4e^{t} = \quad C_2e^{t};$

$$(2C_3 \quad 2C_1)e^{t} + (2C_4 \quad 2C_2)te^{t} = \quad C_2e^{t};$$

$$2C_3 \quad 2C_1 = \quad C_2;$$

$$2C_4 \quad 2C_2 = 0;$$

igualando los dos sistemas de ecuaciones se tiene

$$\begin{array}{llll} 2C_4\,2C_2 & = 0 & 2C_3\,2C_1 & = C_4\ ; \\ 2C_4\,2C_2 & = 0 & 2C_3\,2C_1 & = C_2\ ; \end{array}$$

del sistema del lado izquierdo se concluye que $C_2 = C_4$, sustituyendolo en el sistema del lado derecho

$$2C_3 \quad 2C_1 = \quad C_2;$$
$$2C_3 \quad 2C_1 = \quad C_2;$$

donde $C_3 = C_1 \quad \frac{C_2}{2}$, se deja las soluciones en terminos de constante C_1 y C_2, as obtenemos

$$\begin{array}{ll} x(t) & = C_1e^{t} + C_2te^{t}; \\ y(t) & = C_1e^{t} + C_2te^{t} \quad \frac{C_2}{2}e^{t}\ ; \end{array}$$

es la misma solucion obtenida por el metodo anterior antes de darsen las condiciones iniciales, la respuesta se dar en pareja ordenada de modo que la solucion es:

$$(x(t); y(t)) = \quad C_1e^{t} + C_2te^{t}; C_1e^{t} + C_2te^{t} \quad \frac{C_2}{2}e^{t} \quad ;$$

$$(x(t); y(t)) = \quad C_1\ e^{t}; e^{t} + \quad C_2\ te^{t}; te^{t} \quad \frac{1}{2}e^{t} \quad :$$

3.3 Metodo de valores y vectores propios

Dado el sistema (4) de ecuaciones lineales de primer orden, matricialmente tiene la forma que sigue,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}t & a_{12}t & a_{13}t & \cdots & a_{1n}t \\ a_{21}t & a_{22}t & a_{23}t & \cdots & a_{2n}t \\ a_{31}t & a_{32}t & a_{33}t & \cdots & a_{3n}t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}t & a_{n2}t & a_{n3}t & \cdots & a_{nn}t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix};$$

o simplemente $X^0 = AX(t) + F(t)$, donde

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}t & a_{12}t & a_{13}t & \cdots & a_{1n}t \\ a_{21}t & a_{22}t & a_{12}t & \cdots & a_{2n}t \\ a_{31}t & a_{32}t & a_{33}t & \cdots & a_{3n}t \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}; \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \\ \vdots \end{pmatrix}:$$

De nicion 3.8 (Vector solucion) Un vector solucion del sistema $X^0 = AX(t)+f(t)$, es un vector columna:

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix};$$

donde sus elementos son funciones derivables que satisfacen al sistema de ecuaciones (4) en , un vector solucion es equivalente a tener n ecuaciones escalares $x_1 = {}_1(t)$; $x_2 = {}_2(t)$; :::; $x_n = {}_n(t)$, que geometricamente son interpretadas como un conjunto de ecuaciones parametricas de una curva en el espacio.

De nicion 3.9 (Problemas con valores iniciales) Sea t_0 que denota un punto en el intervalo = (a; b), con solucion,

$$X(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ x_3(t_0) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad y \quad X_0 = \begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \\ {}_3 \\ \vdots \end{pmatrix};$$

donde las $_i = 1; 2; :::; n$ son constantes dadas, entonces el problema

$$X^0 = AX;$$

$$X(t_0) = X_0;$$

es un problema de valores iniciales en.

De nicion 3.10 (Conjunto fundamental de soluciones) Cualquier conjunto $X_1; X_2; :::; X_n$ de n vectores linealmente independientes. sspluciones del sistema homogeneo (4) en , se dice que es un conjunto fundamental de soluciones.

Proposicion 3.11 Las soluciones del sistema lineal $X^0 = AX$ forman un espacio vectorial denominada el Wroskiano que escvrito matricialmente tiene la forma que sigue,

$$W(X_1; X_2; :::; X_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & ::: & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{21} & x_{22} & ::: & x_{nn} \end{vmatrix};$$

con

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}; X_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}; :::; X_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}:$$

Este nuevo espacio, es un subespacio del espacio vectorial de las funciones continuas C( ), cuando las soluciones son linealmente independientes el Wroskiano es diferente de cero.

De nicion 3.12 (Valores y Vectores propios) Sea $A_{n\ n} = (_{ik})$ una matriz cuadrada, el numero se conoce como valor propio de la matriz A si existe una vector columna no nulo v 2 R^n tal que Av = v. El vector v es conocido como el vector propio de A asociado a ,

De nicion 3.13 (Polinomio caracter stico) Si $A_{n\ n}$ es una matriz cuadrada con entrada real, se llama polinomio caracter stico de A y se denota P_A al polinomio de grado n:

$$P_A( ) = \det(A\ I):$$

Si $P_A( )$ se factoriza en factores lineales y, eventualmente, algunos factores irreducibles de grado mayor igual que 2 cuyo producto denotamos Q( ):

$$P_A = (_1)^{n_1} (_2)^{n_2} :::(_r)^{n_r} Q( );$$

la raices del polinomio caracter stico se obtiene de solucionar

$$|A\ I| = \begin{vmatrix} (a_{11}\ ) & a_{12} & ::: & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}\ ) & ::: & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = 0;$$

La repeticion de cada valor propio esta de acuerdo a su multiplicidad nita,

$$X = \{ _k\}_{k=1}^{1};$$

donde

$$0 < _1 \quad _2 \quad _3; :::;$$

ademas

$$_k\ !\ 1; \qquad \text{cuando} \quad k\ !\ 1$$

.

existe una base ortonormal P = f $_k$g^k$_1$$^{=1}$ de L^2( ), donde w_k 2 H_0^1( ) es la funcion propia correspondiente a $_k$:

Cuando $_1$ > 0 se conoce como el valor propio principal de A = ($_{ik}$), los vectores propios correspondientes a cada valor propio forman un subespacio vectorial conocido como subespacio propio, el conjunto (A) de todos los valores propios de A es llamado spectrum y su complemento (A) = C (A) y en el plano complejo es llamado conjunto resolvente de A

De nicion 3.14 (Valores propios de un operador) Se considera el operador T : X ! X de un espacio normado X, sea $A_{n\ n}$ la matriz asocada al operador T . Los valores propios asociados al operador T son los valores propios de A.

De nicion 3.15 (Subespacio propio o caracteristico) Sea un valor propio de A, el conjunto V = fvjAv = vg se llama subespacio propio o espacio caracter stico de A asociado a .

Observe que:

$$
\begin{aligned}
V\ :&=\ fvjAv =\ vg;\\
&=\ fvjAv\ \ v = 0g;\\
&=\ fvj(A\ \ I)v = 0g;
\end{aligned}
$$

de manera que el subespacio propio de A asociado al valor propio corresponde al nucleo de la matriz A I, equivalente se muestra que tambien es el nucleo de I A y la dimension de V se denomina multiplicidad geometrica de V .

Si $_1$; :::; $_k$, son k valores propios de A, diferentes entre s y asociados a los vectores propios v_1; :::; v_k respectivamente, entonces v_1; :::; v_k son linealmente independientes. Observaciones:

Una matriz A, de orden n, tiene a lo sumo n valores propios ya que el polinomio caracter stico a lo sumo tiene n ceros.

Los valores propios de una matriz triangular son los elementos en la diagonal. Notese que si A es triangular entonces A I tambien lo es, de donde se sigue el resultado.

Las matrices A y C ^{1}AC tienen igual polinomio caracter stico y por tanto los mismos valores propios. En efecto:

$$
\det(C\ ^1AC\ \ \ I) = \det(C\ _1(A\ \ \ \ I)C) = \det(A\ \ \ \ I)
$$

a partir de esto se encuentrar los valores propios y para cada uno de ellos se halla una base V resolviendo el sistema det(A I)v = 0

De nicion 3.16 (Matriz diagonalizable) Una matriz A es diagonalizable, si existe una matriz C invertible y una matriz D diagonal tales que

$$C\ ^{1}AC = D$$

Teorema 3.17 Sea $A_{n\ n}$ = ($_{ik}$) una matriz cuadrada de tal forma que el polinomio caracter stico se factoriza como: P_A( ) = det(A I) = ($_1)^{n_1}$ ($_2)^{n_2}$ :::($_r)^{n_r}$ donde $n_1 + n_2$ + ::: + n_r = n, $_1$; :::; $_r$ son todos los valores propios distintos de A, y V $_1$; :::; V $_r$ los espacios propios correspondientes. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

La matriz A es diagonalizable.

Existe una base B = v_1; :::; v_n, para R^n, de vectores propios de A.

Para cada $_i$; i = 1; :::; r, su multiplicidad geometrica es igual a su multiplicidad algebraica. Es decir, dim(V $_i$) = ni, para todo i = 1; :::; r.

dim(V $_1$) + ::: + dim(V $_r$) = n.

Todo vector x 2 R^n se puede escribir de manera unica en la forma x = x_1

+:::+x_r, con x_i 2 V $_i$.

De nicion 3.18 (Diagonalizacion ortogonal) Una matriz $A_{n\ n}$, es ortogonalmente diagonalizable si existe una matriz C ortogonal y una matriz D diagonal, tales que

$$C^tAC = D;$$

establecieno que C es ortogonal si C^tC = I, es decir, si $C^t = C\ ^{1}$

Teorema 3.19 Cuando la matriz cuadrada con entrada real $A_{n\ n}$ es simetrica, su polinomio caracter stico solo tiene ra ces reales.

Si la matriz A es simetrica no solo los vectores asociados son linealmente independientes sino que tambien son ortogonales.

Teorema 3.20 Sea $A_{n\ n}$ una matriz cuadrada con entrada real simetrica y $_1$, $_2$ valores propios distintos de A con vectores propios asociados v y u respectivamente, entonces v y u son ortogonales.

Si la matriz A es simetrica, entonces A^t = A y existe una base B = v_1; :::; v_n de R, ortonormal, formada por vectores propios de A.

3.4 Soluciones mediante valores propios

Se considera el sistema lineal de primer orden,

$$X^0 = AX;$$

sea un valor propio de la matriz A, v es un vector propio asociado de , entonces el sistema tiene solucion de la forma:

$$x(t) = Cve^{\ t}:$$

Si se tiene n soluciones, entonces

$$x_1(t) = v_1e^{\ 1t} \ ; x_2(t) = v_2e^{\ 2t} \ ; :::; x_n(t) = v_ne^{\ nt};$$

$$x(t) = C_1x_1 + C_2x_2 + ::: + C_nx_n:$$

El objetivo de este metodo, es hallar n soluciones linealmente independientes para el sistema $X^0 = AX(t) + F(t)$, para esto, se supone una solucion del tipo $x(t) = e^{\ t}v$, donde v es un vector constante, como $\frac{d}{dt} e^{\ t}v = e^{\ t}v$ y $A(e^{\ t}v) = e^{\ t}Av$, entonces:

$$(e^{\ t}v) = A(e^{\ t}v) = e^{\ t}Av;$$

luego

$$Av = \ v;$$

es decir, $x(t) = e^{\ t}$ es solucion si y solo si y v satisface la ecuacion anterior. A partir de lo estudiado anteriormente encontramos tres casos:

3.4.1 Caso I: valores propios reales distintos

Cuando la matriz $A_{n \ n}$ tiene n eigenvalores reales distintos$_1; \ _2; :::; \ _3$, entonces se pueden encontrar n eigenvectores linealmente independientes $v_1; v_2; :::; v_n$, las soluciones son de la forma,

$$X_1 = v_1e^{\ 1t}; \quad X_2 = v_2e^{\ 1t}; \quad :::; \qquad X_n = v_ne^{\ 1t};$$

$$X = C_1v_1e^{\ 1t} + C_2v_2e^{\ 2t} + ::: + C_nv_ne^{\ nt}:$$

Ejemplo 3.21 Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = 4x + 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x \ y;$$

$$X0 = \begin{matrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{matrix} \ X; \quad X = (x; y);$$

primero hallamos el polinomio caracter stico del sistema

$$\begin{matrix} 3 & (& 1 &) \\ (4 &) & 2 & \end{matrix} = (+ 2)(\quad 5) = 0;$$

como $_1$ = 2 y con a y b constantes tenemos

$$\begin{matrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \quad = \quad \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \quad ;$$

$$\begin{matrix} 6a & 2b & . & 0 \\ 3a & b & . & 0 \end{matrix} \quad ; \quad !$$

solucionando la matriz por Gauss

$$\begin{matrix} 0 & & . & 0 \\ a & \frac{}{3} \; b & . & 0 \end{matrix} \quad ! \quad ;$$

as se tiene los valores a = $\frac{1}{3}$b, si a = 1, entonces b = 3 y el vector propio v =$_1$ $\begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}$;

$$X_1 = v_1 e^{1} = \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \; e^{2t};$$

haciendo el mismo procedimiento con $_2$ = 5

$$\begin{matrix} a & 2b & . & 0 \\ 3a & 6b & . & 0 \end{matrix} \quad ! \quad ;$$

solucionando la matriz por Gauss

$$\begin{matrix} 0 & & . & 0 \\ a & 2b & . & 0 \end{matrix} \quad ! \quad ;$$

luego tenemos que a = 2b con a = 2 y y as se obtiene el vectpr propio v =$_2$ $\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$;

$$X_2 = v_2 e^{2} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} e^{5t};$$

mediante el Wroskiano observamos que ls dos soluciones son linealmente independientes por ser diferente de cero

$$e^{2t} \qquad 2e^{5t}$$

nuestra solucion general del sistema es:

$$x = C_1X_1(t) + C_2X_2(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t};$$

que en forma de escalar ser a

$$x_1 = C_1e^{2t} + C_2 2e^{5t};$$

$$x_2 = 3C_1e^{2t} + C_2e^{5t};$$

$$X = \begin{pmatrix} C_1e^{2t} + C_2 2e^{5t} \\ 3C_1e^{2t} + C_2e^{5t} \end{pmatrix};$$

3.4.2 Caso II: Valores propios complejos

Si es un valor propio complejo de la matriz A, tambien es valor propio de la matriz, con vector propio $\bar{v}$ asociado a , de modo que de nimos el conjugado de un vector componente a componente

$$v = \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ a_2 + ib_2 \\ \vdots \\ a_n + ib_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a + ib;$$

entonces $\bar{v} = a$ ib, a partir de esto, se tiene que la solucion asociada con y v es

$$X(t) = ve^{t} = ve^{p+iq} = (a + ib)e^{pt}(\cos(qt) + i\,\mathrm{sen}(qt));$$

que es lo mismo a tener

$$X(t) = e^{pt}(a\cos(qt) \quad b\,\mathrm{sen}(qt)) + ie^{pt}(b\cos(qt) + a\,\mathrm{sen}(qt)):$$

Ejemplo 3.22 Encontrar la solucion general del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \quad y + 2z \\ \frac{dy}{dt} = \quad x \\ \frac{dz}{dt} = \quad x + z; \end{cases}$$

se tiene la matriz asosiada

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X;$$

el correspondiente polinomio caracter stico es

$$\begin{matrix} & 1 & (1\ \ ) & 0 \\ (1\ \ ) & 1 & & 2) \end{matrix} = (1\ \ )[(1\ \ )^2 + 1] = 0;$$

los valores propios son: $_1 = 1$, $_2 = 1\ \ i$ y $_3 = 1 + i$, con $_1 = 1$ se tiene

$$\begin{pmatrix} 0 & b & 2c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} ;$$

donde a = 0 y b = 2c, si se toma a c = 1 se obtiene que b = 2 y vector propio correspondiente ser a

$$v = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad X_1 = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t;$$

ahora con $_2 = 1\ \ i$

$$\begin{pmatrix} ia & b & 2c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} ;$$

de la segunda y tercer la tenemos que b=c, por otro lado tenemos que a=ib, si a=-i entonces b=c=1

$$v = C_2 \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t \quad i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \operatorname{sen} t;$$

$$X_2 = c_2 \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(t) \\ \cos(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} e^t;$$

por ultimo con $_2 = 1 + i$

$$\begin{pmatrix} ia & b & 2c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} ;$$

igual que en la anterior b=c, por otro lado tenemos que -a=ib, si a=1 entonces b=c=-i

$$v = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(t) \quad i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \operatorname{sen}(t);$$

$$X_2 = c_3 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \mathrm{sen}(t) \\ \mathrm{sen}(t) \end{pmatrix} e^{t};$$

tewniendo como solucion general

$$X = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} \mathrm{sen}(t) \\ \cos(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} e^{t} + c_3 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \mathrm{sen}(t) \\ \mathrm{sen}(t) \end{pmatrix} e^{t}.$$

3.4.3 Caso III: Valores propios reales repetidos

Dada la matiz $A_{n \times n}$ no todos sus eigenvalores $\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_n$ pueden ser distintos, entonces se dice que λ_1 es de multiplicidad m, se presenta casos en donde algunas matrices A es posibe encontrar m eigenvectores linealmente independientes $v_1; v_2; \dots; v_n$ correspondiente a λ_1 de multiplicidad $m < n$ teniendo como solucion general la combinacion lineal

$$C_1 v_1 e^{\lambda_1} + C_2 v_2 e^{\lambda_1} + \dots + C_m v_m e^{\lambda_1};$$

si es un eigenvector propio correspondiente al eigenvalor λ_1 de multiplicidad m entonces se encontraran m soluciones linealmente independientes de la forma

$$X_1 = v_1 e^{\lambda t};$$

$$X_2 = (v_1 t + v_2) e^{\lambda t};$$

$$X_3 = \left(\frac{v_1}{2} t^2 + v_2 t + v_3\right) e^{\lambda t};$$

$$\vdots$$

$$X_n = \left(\frac{v_1 t^{m-1}}{(m-1)!} + \dots + \frac{v_{m-2}}{2!} + v_{m-1} t + v_m\right) e^{\lambda t};$$

Ejemplo 3.23 .

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 17y + 4z \\ \frac{dy}{dt} = x + 6y + z \\ \frac{dz}{dt} = 0x + y + 2z; \end{cases}$$

su matriz asociada

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & 17 & 4 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} x;$$

polinomio carater stico correspondiente

$$(-2-\lambda)\left[(6-\lambda)(\ldots) - 17 \ldots + 4\right] = (2-\lambda)^3 = 0;$$

se tiene que (2) es un vector propio de multiplicidad 3, y la ecuacion del vector propio (A I)v = 0 para un eigenvector con = 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 17 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array};$$

en la tercer la se sabe que b = 0 lo que lleva a que la la 1 y 2 es multiplo una de la otra teneindo asi que m < n

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(A+I)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$(A+I)^3 = 0$ pero v debe ser diferente de cero, as que se supondra el vector

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$v_2 = (A - I)v_3 = \begin{pmatrix} 4 & 17 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$v_1 = (A - I)v_3 = \begin{pmatrix} 4 & 17 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$X_1(t) = v_1 e^{2t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t};$$

$$X_2(t) = (v_1 t + v_2)e^{2t} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} t+4 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} e^{2t};$$

$$X_3(t) = (\frac{1}{2}v_1t^2 + v_2t + v_3)e^{2t} = \left[\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}t^2 \quad 4t+1\\ t \quad 1\\ \frac{1}{2}t^2\end{pmatrix}e^{2t};$$

$$x = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^{2t} + \begin{pmatrix}t \quad 1\\1 \quad 1\\t\end{pmatrix}e^{2t} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}t^2 \quad 4t+1\\ t \quad 1\\ \frac{1}{2}t^2\end{pmatrix}e^{2t}:$$

Si $x_1(t); x_2(t); \dots; x_n(t)$ son n soluciones del sistema lineal homogeneo $x' = A(t)x$ tales que cualquier otra solucion del sistema, x(t), se puede poner como combinacion lineal de ellas, se dice que forman un sistema fundamental de soluciones.

Definicion 3.24 (Sistema de ecuaciones diferenciales parciales) Un sistema de EDPs es un conjunto de dos o mas EDPs en las que aparece una o mas funciones dependientes y una o mas variables independientes, mediante operadores tiene la forma que sigue

$$F(D^k u(x); D^{k-1}u(x); \dots; Du(x); u(x); x) = 0 \qquad u \in \Omega:$$

Tomemos como ejemplo un sistema EDPs de orden 1

$$\Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m;$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = a_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial u_1}{\partial x} + \cdots + a_{1n}\frac{\partial u_1}{\partial x} + f_1 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = a_{21}\frac{\partial u_2}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial u_2}{\partial x} + \cdots + a_{2n}\frac{\partial u_2}{\partial x} + f_2 \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} = a_{31}\frac{\partial u_3}{\partial x} + a_{32}\frac{\partial u_3}{\partial x} + \cdots + a_{3n}\frac{\partial u_3}{\partial x} + f_3 \\ \vdots \end{cases}$$

de igual manera que en los sistemas de EDO puede expresarse de forma matricial

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial x} = F:$$

con

$$U = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\\vdots\end{pmatrix}; \; A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{12} & a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix}; \; F = \begin{pmatrix}f_1\\f_2\\f_3\\\vdots\end{pmatrix};$$

@ A @ A @ A

Dado el sistema de ecuaciones parciales (5) donde las funciones $f_1; f_2; :::; f_n$ son continuas y ademas si f = 0 se dice que es homogeneo, de lo contrario es no-homogeneo, as por ejemplo tenemos

$$A = \frac{@u}{@t} + v = 0 \quad \frac{@v}{@t}$$

es un sistema de ecuaciones el ptico de orden 1 y grado 1.

De nicion 3.25 (Solucion de un sistema de EDPs) La solucion del sistema EDPs (5) en una cierta region D de variaciones de las x_i , 8i = 1; 2; :::; n es una funcion cualquiera $u = u(x_1; x_2; :::; x_n)$ 2 C^m( ), tal que al sustituir a u y sus derivadas se convierte en la identidad respecto a x_i . 8i = 1; 2; :::; n en una region D.

$$u : \; ! \; R^m;$$

teniendo $u = u(x_1; x_2; :::; x_n)$ y que x 2

$$Au_x + Bu_y = Cu + d;$$

donde A; B y C son matrices de orden n n que depende de (x; y); u y d son vectores n 1 y d tambien es una funcion de (x; y), si las ra ces del son reales y diferentes entre si, el sistema (1) es hiperbolico, si todas son complejas entonces es el ptico

Cap tulo 4

EJEMPLO DE APLICACION AL SISTEMA DE ECUACIONES (R)

En este cap tulo se estudiara un sistema de ecuaciones en derivadas parciales el ptico, para ser mas exactos sera un sistema de reaccion-difucion, luego se dar un ejemplo particular de nuestra autor a siendo este el aspecto central y mas importante de nuestro trabajo. si se desea consultar mas acerca del tema puede referirse a [19], [20], [21] y [22].

El sistema de ecuaciones diferenciles parciales eliptico que llamamos (R), representa un sistema de reaccion-difucion en un estado de equilibrio donde R es un dominio acotado su cientemente suave, f; g son funciones reales y , , y son numeros reales, tenemos:

$$(R) \quad \begin{array}{ll} u = u + v + g_1(u) & \text{en} \\ v = u + v + g_2(v) & \text{en} \\ u = v = 0 & \text{en } @ : \end{array}$$

(R) puede escribirse de forma u matricial como:

$$U = (u; v); U \quad \begin{matrix} v \\ u \end{matrix} \quad ; \quad A = \quad ; \quad G(U) = \begin{matrix} g_2(v) \\ g_1(u) \end{matrix} \quad ;$$

$$U = A(U) + G(U);$$

los valores propios asociados al sistema (R) son:

$$_1 = \frac{2}{+} \; s \; \overline{^2 \quad \overline{}\; ^2} \; +; \quad _2 = \frac{2}{+} + s \; \overline{^2 \quad \overline{}\; ^2 +} \; ;$$

Este enfoque da un buen signi cado de resonancia para los sistemas de desacoplamiento, la solucion del sistema (R) sera encontrar una funcion $U \in H_0^1$ H_0^1, con

$$U = (\ \ )^{1}(AU + GU);$$

si se asumen que g_i; $i = 1; 2; :::$ son continuas y acotadas, entonces el operador G es de nido en E con rango en E es continuo y acotado, luego el operador de nido como solucion es compacto.

De manera que si U 6= 0, entonces (A)(U) = 0 lo que indica que (R) es un sistema en resonancia. Si > 0 entonces (R) es llamado un sistemma cooperativo y si < 0 es llamado un sistema no coopertivo.

Podr a darse una descripcion precisa del kernel del operador; si (A) 6= 0 () (A $_j$I) es singular para algunos valores $_j$ del operador , si $x = (x_1; x_2)$ 6= (0; 0) de manera que Ax = $_j$x, entonces

$$U = (x_1\ _j; x_2\ _j)\ 2\ \ker(A).$$

Se tiene que $(\ \ )^{1}$: E ! H_0^1 H_0^1 es un operador lineal, continuo, autoadjunto e inyectivo, tambien la inclusion H_0^1 H_0^1 ,! E es compacto, as $(\ \ )^{1}$: E ! E tambien es compacto, auto adjunto e inyectivo.

Si se tiene

$$U = A(U) + G(U) =)\ (\qquad A)(U) = G(U);$$

Si $E = L^2(\ ) \quad L^2(\ )$ denotaremos el producto interno y su norma por

$$hU;\ i = hu;\ i_{L^2(\ )} + hv;\ i_{L^2(\ )};\ kUk^2 = kuk^2_{L^2(\ )} + kvk^2_{L^2(\ )}:$$

Si U = (u; v) y (;), en orden de simpli car la notacion mas tarde, dado U = (u; v) 2 E con u = P $_j$ u $_j$' = P v $_j$ $_j$, donde f $_j$g son $_{2R}$ las funciones porpias asociadas a cada valor propio $_j$, decimos que $U_j = (u_j; v_j)$ son coordenadas de U, denotamos = ($_j$; $_j$) y escribimos U = U_j $_j$.

Mediante el uso del compacto U; = (u; $_1$; v; $_1$)) ^{2} veamos que $U_j = U;\ ^j$:

1. hU; i = h ; Ui
2. hU; i + = hU; i + hU; i
3. h U; i = hU; i
4. $h(\ )^{1}U;\ i = hU;\ (\ )^{1}i$
5. U = W si y solo si $U_j = W_j 8j = 1; 2; :::$
6. hBU; ^{j}i = Bh ; U^ji en la forma $(BU)_j$ BU_j para toda matriz $B_{2\ 2}$

Teorema 4.1 .

(H:1) $jg_1(z)\quad g_1(w)j\quad K_1jz\quad wj$. i = 1; 2; ::: donde $K_1 + K_2 + kAk$ $_2$

(H:2) 6= 0

(H:3) $(g_1^0(0)g_2^0(0))= > 1$

Entonces el problema (R) tiene al menos unas solucion no cero si.

$$U = (\quad)^{1}(AU + G(U));$$

el operador vemos que $= D(\quad)$ $L^2(\ ) ! L^2(\ )$ donde $D(\quad) = H^{2;2}(\ ) \setminus H_0^{1;2}(\ )$ es un operador lineal, adjunto y biyectivo, una solucion u $2 L^2(\ )$ es una solucion si y solo si de nimos el operador inverso del mismo siendo compacto, acotado y lineal.

$$(\ )^{1} : L^2(\ ) ! L^2(\ :$$

A continuacion se dar solucion a un ejemplo de sistema de ecuaciones diferenciales el pticas siendo este de nuestra autor a para aplicar la teor a estudiada durante el texto.

$$(M) \begin{cases} u = u + v + sen(u) & en \\ v = u + v + sen(v) & en \\ u = v = 0 & en \ @ \ ; \end{cases}$$

su forma matricial asociada de (M) es

$$U = (u; v); U \quad \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} ; \qquad A = \qquad ; \qquad G(U) = \begin{matrix} sen(u) \\ sen(v) \end{matrix} ;$$

$$U = A(U) + G(U);$$

donde G(U) esta compuesta por funciones Lipschitz. Se determinan los valores propios asociados de (M) mediante el polinomio caracter stico,

$$det(A \quad I) = jA \quad Ij = 0$$

$$det \qquad 0 \qquad 0 \qquad = 0;$$

$$det \qquad = 0:$$

$$= 0;$$

teniendo como polinomio caracter stico

$$^2 \quad (\ + \ ) + (^2) = 0;$$

y obteniendo los valores propios asosiados

$$_1 = \frac{(+) + \sqrt{(+)^2 \quad 4(^2)}}{2} \quad ; \quad _2 = \frac{(+) \quad \sqrt{(+)^2 \quad 4(^2)}}{2};$$

A partir de los valores propios $_1$ y $_2$, se construye el subespacio propio

$$V = fxjAx = xg;$$

$$u = 0 (+) \quad q \quad (+)^2 \quad 4(^2) \quad u \quad 1;$$

@ A

Obteniendo as los vectores propios correspondientes a cada valor propio $_1$ y $_2$

$$v_1 = \frac{}{(+) + \sqrt{(+)^2 \quad 4(^2)}} \; ! \; ; \; V_2 = \frac{}{( ) + \sqrt{(+)^2 \quad 4(^2)}} \; ! \; ;$$

Luego se contruye una matriz con los valores propios que es diagonalizable, donde sus elementos son los valores propios de la matriz.

$$D = 0 \; B \; \frac{(+) \sqrt{(+)^2 \quad 4(^2)}}{2} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{(+) \sqrt{(+)^2 \quad 4(^2)}}{} \quad 1 \; C$$

De manera que $S^{1}AS = D$ obteniendo asi la matriz invertible la cual esta compuesta por sus respectivos vectores propios estableciendolos como columnas.

$$S = 0 \; (+) + \sqrt{(+)^2 \quad 4(^2)} \quad (\;) + \sqrt{(+)^2 \quad 4(^2)} \quad 1$$

@ 1 1 A

$$S^{1} = 0 \; \sqrt{(+)^2 \quad 4(^2)} \quad (+) + \sqrt{(+)^2 \quad 4(^2)} \quad 1$$

$$B \; B \quad 2 \quad 4(\quad 2 \quad ( ) + \sqrt{(} \quad 2 \quad 2\sqrt{(+)^2 \quad 4()} \quad 2 \quad 4(^2) \quad C \; C$$

@ A

CONCLUSIONES

Es de gran importancia la utilizacion del teorema 3:28 (Landesman y Lazer), el cual este establece las condiciones para que el sistema de ecuaciones propuesto tenga al menos una solucion diferente de cero positiva. Con la utilizacion del metodo de valores y vectores propios, se logr encontrar una solucion diferente de cero al sistema de ecuaciones (R).

Si la matriz de los coe cientes del sistema de EDPs es simetrica y sus vectores propios son linealmente independientes. A partir de esto se construye una matriz invertible C, tal que $C^{1}AC = D$, donde D es una matriz diagonal compuesta por los valores propios, ademas C puede ser una matriz ortogonal si se cumple $C^{t}AC = D$.

El conjunto fundamental de soluciones V_{1}, V_{1} del sistema (M) conforman el subespacio propio de la matriz A que describe el el nucleo del operador (A)U.

Se logr establecer establecer que el sistema de ecuaciones diferencielaes parciales (M), es un sistema cooperativo debido a que $^{2} > 0$ y se asume que es un sistema de resonancia por se G una funcion acotada. Se determino que si > o < , la matriz A conserva los mismos valores propios y la matriz diagonal es la misma, pero los vectores propios son conjungados unos a los otros.

Bibliograf a

[1] Adams, Robert Andrea(2007) Sobolev spaces. Canada. Deartament of Matheatics, The University of British columbia. Editorial Academic Press.

[2] Ambrosetti, Antonio(1993) A Primer of Nolinear Analysis. Department of Mathematics, University of Pisa. Cambridge University Press.

[3] Ambrosetti, Antonio and Acoya, David(2011) An Introduction to Nonlinear Func-tional Analysisand Elliptic Problems. Paris: Universit Pierre et Marie Curie Pa. Springer.

[4] Ambrosetti, Antonio and Malchiodi, Andrea(2007) Nonlinear Analysis and Semi-linear Elliptic Problems. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press. Editorial Board.

[5] Ca~nada, Antonio(1995) Introduccion al analisis no lineal con aplicacion a ecua-ciones diferenciales e integrales. Departamento de analisis matematico, Universi-dad de Granada.

[6] Cabello, Juan Carlos (2009) Analisis Funcional. Granada, Universidad de Granada.

[7] Ca~nada, Antonio(2010) Apuntes de metodos varacionales. Departamento de analisis matematico, Universidad de Granada.

[8] Clapp, Monica (2011)Una probadita de metodos variacionales en EDPs. Mexico,Instituto de Matematicas, Universidad Nacional Autonoma de Mexico.

[9] Dacoronga, Bernand(2004) Introduction to the Calculus OF Varations. Scole Poly-technique Federale. Imperial College Press.

[10] Escobar, Jaime Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de Maple. Colombia: Universidad de Antioquia.

[11] Evans, Lawwrence Partial Di erential Equation: American Mathematical Society

[12] Gilbart, David ft Trudinger, Neils (1998)Elliptic Partial Diferential Equations of the Second Order. Springer.

[13] Haim Brezis functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Di erential Equations. USA: Rutgers University. Springer.

[14] Kreyszig, Erwin Introductory Functional Analysis With Applications. Canada: University of Windsor.

[15] Kreyszig, Erwin Advanced Engineering Mathematics Center of mathematics, Ohio state University.

[16] L,Elsgoltz (1969) Ecuaciones diferenciales y calculo variacional

[17] Romero, Sixto(2001) Introduccion a las Ecuaciones en derivadas Parciales. Escuela Politecnica Superior de La Rabida, Universidad de Huelva. Copyright.

[18] Vicent, D. Radulescu(2008) Qualitative Analysis of Nolinear Elliptic Partial Differential Equations. Romania: Department of Mathematics, University of Craiova. Hindawi Publishing Corporation.

[19] Zou,Wenming (1999) Multiple Solutions for Asymptotically Linear Elliptic Systems1 . Republic of China: Department of Mathematical Sciences, Tsinghua Uni-versity.

[20] Zuluaga, Mario(1996) Nozero Ssolutions Of A Nonlinear Elliptic System At Reso-nance . Colombia: Departamento de Matematicas, Universidad Nacional de Colom-bia.

[21] Zuluaga, Mario On a nonlinear elliptic system: resonance and bifurcation cases . Colombia: Departamento de Matematicas, Universidad Nacional de Colombia.

[22] Zuluaga, Mario and vargas, cristobal A Nonlinear Elliptic Problem At Resonance With A Nonsimple Eigenvalue. Colombia: Departamento de Matematicas, Univer-sidad Nacional de Colombia.

Los suscritos:

MIGUEL ANGEL CETINA HOYOS	**con C.C N°**	1109003934
	con C.C N°	
	con C.C N°	
	con C.C N°	
	con C.C N°	

Manifiesto (an) la voluntad de:

Autorizar [x]

No Autorizar [ ] **Motivo**: ______________________

La consulta en físico y la virtualización de **mi OBRA**, con el fin de incluirlo en el repositorio institucional de la Universidad del Tolima. Esta autorización se hace sin ánimo de lucro, con fines académicos y no implica una cesión de derechos patrimoniales de autor.

Manifestamos que se trata de una OBRA original y como de la autoría de LA OBRA y en relación a la misma, declara que la UNIVERSIDAD DEL TOLIMA, se encuentra, en todo caso, libre de todo tipo de responsabilidad, sea civil, administrativa o penal (incluido el reclamo por plagio).

Por su parte la UNIVERSIDAD DEL TOLIMA se compromete a imponer las medidas necesarias que garanticen la conservación y custodia de la obra tanto en espacios físico como virtual, ajustándose para dicho fin a las normas fijadas en el Reglamento de Propiedad Intelectual de la Universidad, en la Ley 23 de 1982 y demás normas concordantes.

La publicación de:

Trabajo de grado	X	Artículo		Proyecto de Investigación	
Libro		Parte de libro		Documento de conferencia	
Patente		Informe técnico			

Otro: (fotografía, mapa, radiografía, película, video, entre otros) [ ]

Producto de la actividad académica/científica/cultural en la Universidad del Tolima, para que con fines académicos e investigativos, muestre al mundo la producción intelectual de la Universidad del Tolima. Con todo, en mi condición de autor me reservo los derechos morales de la obra antes citada con arreglo al artículo 30 de la Ley 23 de 1982. En concordancia suscribo este documento en el momento mismo que hago entrega del trabajo final a la Biblioteca Rafael Parga Cortes de la Universidad del Tolima.

De conformidad con lo establecido en la Ley 23 de 1982 en los artículos 30 ***"…Derechos Morales. El autor tendrá sobre su obra un derecho perpetuo, inalienable e irrenunciable"*** **y 37 "*…Es lícita la reproducción por cualquier medio, de una obra literaria o científica, ordenada u obtenida por el interesado en un solo ejemplar para su uso privado y sin fines de lucro*". El artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "*los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores*" y en su artículo 61 de la Constitución Política de Colombia.**

- Identificación del documento:

  SOLUCIONES POSITIVAS A UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES ELIPTICAS

Título completo: Trabajo de grado presentado para optar al título de: Licenciado En Matemáticas

____

- Proyecto de Investigación correspondiente al Programa (No diligenciar si es opción de grado "Trabajo de Grado"): ______________________________

- Informe Técnico correspondiente al Programa (No diligenciar si es opción de grado "Trabajo de Grado"): ______________________________

- Artículo publicado en revista: ______________________________

- Capítulo publicado en libro: ______________________________

- Conferencia a la que se presentó: ______________________________

Quienes a continuación autentican con su firma la autorización para la digitalización e inclusión en el repositorio digital de la Universidad del Tolima, el:

Día: **18** Mes: **Mayo** Año: **2017**

Autores: Firma

Nombre:	MIGUEL ANGEL CETINA HOYOS	Miguel Angel Cetina.	C.C.	**1109003934**
Nombre:			C.C	
Nombre:			C.C.	
Nombre:			C.C.	

El autor y/o autores certifican que conocen las derivadas jurídicas que se generan en aplicación de los principios del derecho de autor.